NGUYỄN TIẾN QUANG

BÀI TẬP SỐ HỌC

(DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG
CAO ĐẲNG SƯ PHẠM VÀ ĐẠI HỌC SƯ PHẠ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN TIẾN QUANG

BÀI TẬP SỐ HỌC

(Dùng cho sinh viên các trường Cao đẳng Sư phạm
và Đại học sư phạm)

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Những năm gần đây môn Số học được giảng dạy cho sinh viên Cao đẳng sư phạm theo giáo trình " Số học " của Nguyễn Tiến Tài – Nguyễn Hữu Hoan và cho sinh viên Đại học sư phạm theo giáo trình " Đại số và số học " của Ngô Thúc Lanh (tập I, tập II).

Cuốn sách này được biên soạn dựa trên hai giáo trình đã nêu, có tham khảo thêm " Giáo trình số học " của Lại Đức Thịnh. Để thuận tiện cho việc học tập của sinh viên, chúng tôi viết phần tóm tắt lý thuyết và lấy các đề toán chủ yếu dựa trên cuốn " Số học " của Nguyễn Tiến Tài – Nguyễn Hữu Hoan. Tuy nhiên chúng tôi có bỏ bớt một số bài toán đơn giản, đơn thuần áp dụng kiến thức cơ bản, hoặc có nội dung trùng lặp và thêm vào một loạt bài khó hơn mang tính lý thuyết hoặc đòi hỏi suy luận sáng tạo khi giải.

Riêng với chương VI chúng tôi nêu cả hai cách xây dựng trường số thực theo hai giáo trình nói trên và chọn các bài tập tương ứng với cả hai cách trình bày đó.

Về ký hiệu, để đơn giản trong cách trình bày chúng tôi chọn cách ký hiệu $(a_1, a_2, ..., a_n)$ để chỉ ước chung lớn nhất, thay cho ƯCLN $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và ký hiệu $[a_1, a_2, ..., a_n]$ để chỉ bội chung nhỏ nhất thay cho BCNN $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Chúng tôi hy vọng rằng cuốn sách là một tài liệu thiết thực cho sinh viên các trường Cao đẳng sư phạm, Đại học sư phạm và cho cả những học sinh phổ thông có năng khiếu về toán.

Trong khi biên soạn chúng tôi đã nhận được nhiều ý kiến quý báu của các đồng nghiệp trong Bộ môn Đại số – Trường Đại học Sư phạm Hà Nội và sự giúp đỡ nhiệt tình của một số đồng nghiệp trẻ, chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Cuốn sách chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2001

Tác giả

TS. Nguyễn Tiến Quang

Phần một

TÓM TẮT LÝ THUYẾT VÀ ĐỀ TOÁN

CHƯƠNG I. SỐ TỰ NHIÊN

1.TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN $\mathbb{N}$

Ta nói rằng tập hợp A *tương đương* (hay *đẳng lực*) với tập hợp B và viết A ~ B, nếu có một song ánh từ A lên B.

Một tập hợp được gọi là *hữu hạn* nếu nó không tương đương với một bộ phận thực sự nào của nó. Tập hợp không hữu hạn gọi là tập hợp *vô hạn* .

Khi các tập hợp A và B tương đương với nhau ta nói rằng chúng cùng một *lực lượng* hay cùng một *bản số*. Bản số của tập hợp A ký hiệu bởi $|A|$ hay cardA .

Bản số của một tập hợp hữu hạn được gọi là một *số tự nhiên*. Ta đặt $|\varnothing| = 0$ và $|\{\varnothing\}| = 1$. Tập hợp tất cả các số tự nhiên ký hiệu bởi $\mathbb{N}$.

Giả sử a, b thuộc $\mathbb{N}$, và $a = |A|$, $b = |B|$. Ta nói a *nhỏ hơn hoặc bằng* b, kí hiệu là $a \le b$, nếu có một đơn ánh từ A tới B (nghĩa là A tương đương với một bộ phận của B).

Nếu $a = |A|$, $b = |B|$, $A \subset B$, và $B \setminus A = \{x\}$ thì ta nói b là *số liền sau* a và kí hiệu $b = a'$.

Với mỗi số tự nhiên a, số liền sau a' là duy nhất. Hơn nữa, nếu $a < b$ thì $a' \le b$.

Phép chứng minh quy nạp

Để chứng minh một mệnh đề P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \ge a$ (a là số tự nhiên nào đó) ta chứng minh hai điều :

(1) P(a) đúng,

(2) P(n) đúng $\Rightarrow$ P(n') đúng.

Phép chứng minh (2) có thể được thay thế bởi

(2') P(k) đúng với mọi $k \leq n$ thì P(n') đúng.

Tính sắp thứ tự tốt

Mọi bộ phận khác rỗng của các số tự nhiên đều có số nhỏ nhất.

Từ tính chất trên có thể suy ra rằng mọi bộ phận khác rỗng bị chặn của tập hợp các số tự nhiên đều có số lớn nhất.

2. PHÉP TOÁN TRÊN $\mathbb{N}$

Trên tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$ ta định nghĩa phép toán cộng và phép toán nhân bởi

$$a + b = \mathrm{card}(A \cup B)$$
$$a.b = \mathrm{card}(A \times B)$$

trong đó $a = \mathrm{card}(A)$, $b = \mathrm{card}(B)$ và $A \cap B = \varnothing$.

Với phép toán cộng ta có :

1) $a + 1 = a'$

2) $a \leq b \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}$, $a + c = b$.

Số tự nhiên c mà $a + c = b$ được gọi là *hiệu* của b và a, kí hiệu $c = b - a$.

Với phép nhân, nếu $a = bq$, $b \neq 0$, thì ta nói a *chia hết cho* b.

Định lí về phép chia có dư. Với mọi cặp số tự nhiên a, b, $b \neq 0$ luôn tồn tại duy nhất cặp số tự nhiên q và r sao cho

$$a = bq + r,\ 0 \leq r < b.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. TẬP HỢP SỐ TỰ NHIÊN $\mathbb{N}$

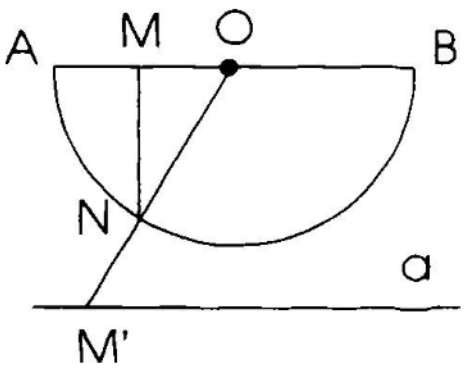
1.1. Kí hiệu AB là tập hợp các điểm nằm trên nửa đường tròn đường kính AB, [AB] là tập hợp các điểm của đoạn thẳng AB.

Chứng tỏ rằng AB $\sim$ [AB].

1.2. Xét nửa đường tròn đường kính AB và đường thẳng a song song với AB. Kí hiệu (AB) là tập hợp các điểm của khoảng AB, (a) là tập hợp các điểm của đường thẳng a.

a) Chứng tỏ rằng ánh xạ :

$$f : (AB) \to (a)$$
$$M \mapsto f(M) = M'$$



trong đó M' được xác định theo hình bên. là một song ánh.

b) Chứng tỏ (a) là một tập vô hạn.

1.3. Cho a, b $\in \mathbb{N}$, chứng minh rằng $a < b$ khi và chỉ khi $a' < b'$.

1.4. Cho $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Kí hiệu :

$$S_n = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < n \}.$$

a) Viết các tập hợp S_1, S_2, S_3.

b) Bằng phép quy nạp toán học hãy chứng minh rằng

$$\text{card } S_n = n.$$